▶ Potenzen und Wurzel

Für $a \neq 0$, $\underbrace{k \in \mathbb{N}}_{\text{natürliche Zahl}}$ gilt $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{k \text{ mal}}$

$$a^0 = 1, \quad 1^n = 1$$

$$a^{-k} = (a^k)^{-1} = \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a \cdot a \cdots a}$$

a Grundzahl, k Exponente

▶ Eigenschaften:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

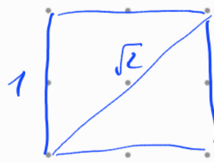
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

▶ Die (quadratische, zweite) Wurzel aus einer Zahl $a \geq 0$ ist die Zahl w, für die gilt $w \geq 0$ und $w^2 = a$.

Notation: $w = \sqrt{a}$

<u>Bsp</u> 1) $\sqrt{2}$? $\sqrt{2} \geq 0$ und $(\sqrt{2})^2 = 2$



$\sqrt{2} \approx 1{,}41\ldots$ Dezimalentw.

2) Gleichung $x^2=4$ hat zwei Lösungen: $x=2$ und $x=-2$. Aber $\sqrt{4}=2$.

3) $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

4) $\sqrt{21} = \sqrt{3 \cdot 7}$ ← kann man nicht vereinfachen

5) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

6) $\sqrt{\frac{11}{15}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$ Wir wollen generell keine Wurzel im Nenner

$$\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{11 \cdot 15}}{\sqrt{15^2}} = \frac{\sqrt{11 \cdot 15}}{15} = \frac{1}{15} \cdot \sqrt{11 \cdot 15}$$

Die n-te Wurzel aus a ist die Zahl w mit $w^n = a$. Notation: $w = \sqrt[n]{a}$
(für n gerade muss $a \geq 0$ sein, dann ist auch $w \geq 0$.)

Bsp 1) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} =$
$= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$

2) $\sqrt[3]{\frac{14}{15}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 5^2}}$

$= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{3^3 \cdot 5^3}} = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}}{\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3}} = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}}{3 \cdot 5}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{1}{15} \sqrt[3]{3150}$

keine Wurzel im Nenner = Normalform

- Potenzen mit rationalen Exponenten
für $r \in \mathbb{Z}$ ganze Zahl, $s \in \mathbb{N}$ natürliche, $a > 0$ gilt

$$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r} \quad ; \quad a^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a}$$

z.B. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Es gelten dieselben Rechenregeln (Eigenschaften) wie oben

<u>Bsp</u> 1) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

2) $a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}}$

$= \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$

3) $7^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{7^3} = \sqrt{7^2 \cdot 7} = \sqrt{7^2}\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

alternativ: bemerke, dass $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

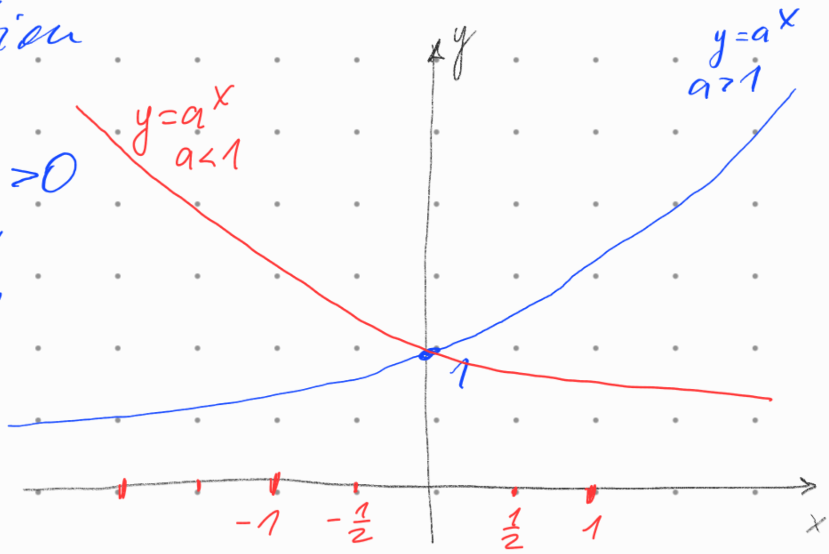
$7^{\frac{3}{2}} = 7^{\left(1+\frac{1}{2}\right)} \underset{\text{I Eigenschaft}}{=} 7^1 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7 \cdot \sqrt{7}$

4) $2^{\frac{5}{3}} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

Exponentialfunktion

$f(x) = \underline{a}^x$ für $a > 0$

- wächst für $a > 1$
- fällt für $a < 1$



1) $(2^3)^5 \cdot (2^5)^3 = 2^{3\cdot 5} \cdot 2^{5\cdot 3} = 2^{15} \cdot 2^{15}$

$= 2^{15+15} = 2^{30} = 1\,Gb = (1024)^3 \approx 1 \cdot 10^9$

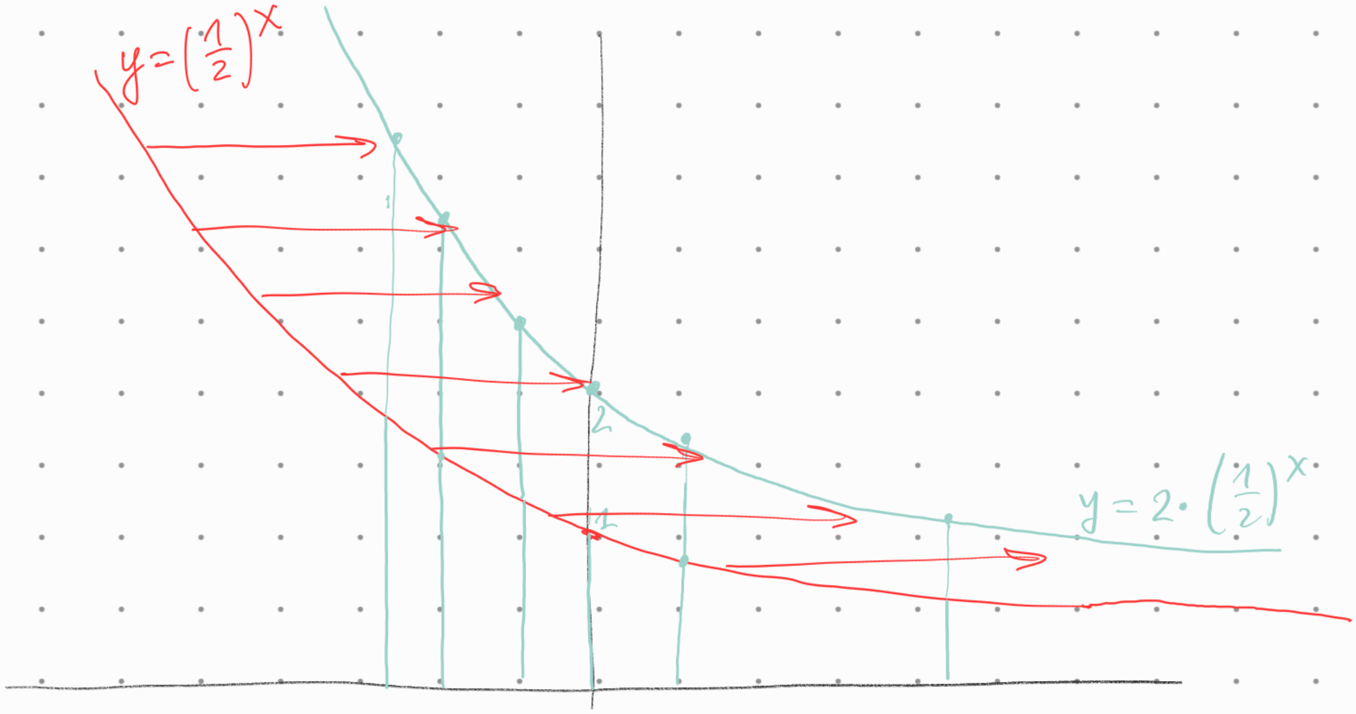
$= (\underset{\underset{\underset{1024}{\shortparallel}}{1kb}}{\underset{\shortparallel}{2^{10}}})^3$ $\qquad (2^{10})^2 = 1\,Mb$

2) $(2^{3-2x})^4 = 2^{4\cdot(3-2x)} = 2^{12-8x}$

$= 2^{12} \cdot 2^{-8x} = 2^{12} \cdot (\underset{\underset{1}{\wedge}}{\underline{2^{-8}}})^x$

3) Skizziere $f(x) = 2^{1-x}$

$f(x) = 2^{1-x} = \frac{2^1}{2^x} = 2 \cdot \frac{1}{2^x} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$$f(x)=2^{1-x}=2^{-(x-1)}=\left(2^{-1}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

Graph von $f(x)$ ist der Graph von $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ um 1 nach rechts verschoben

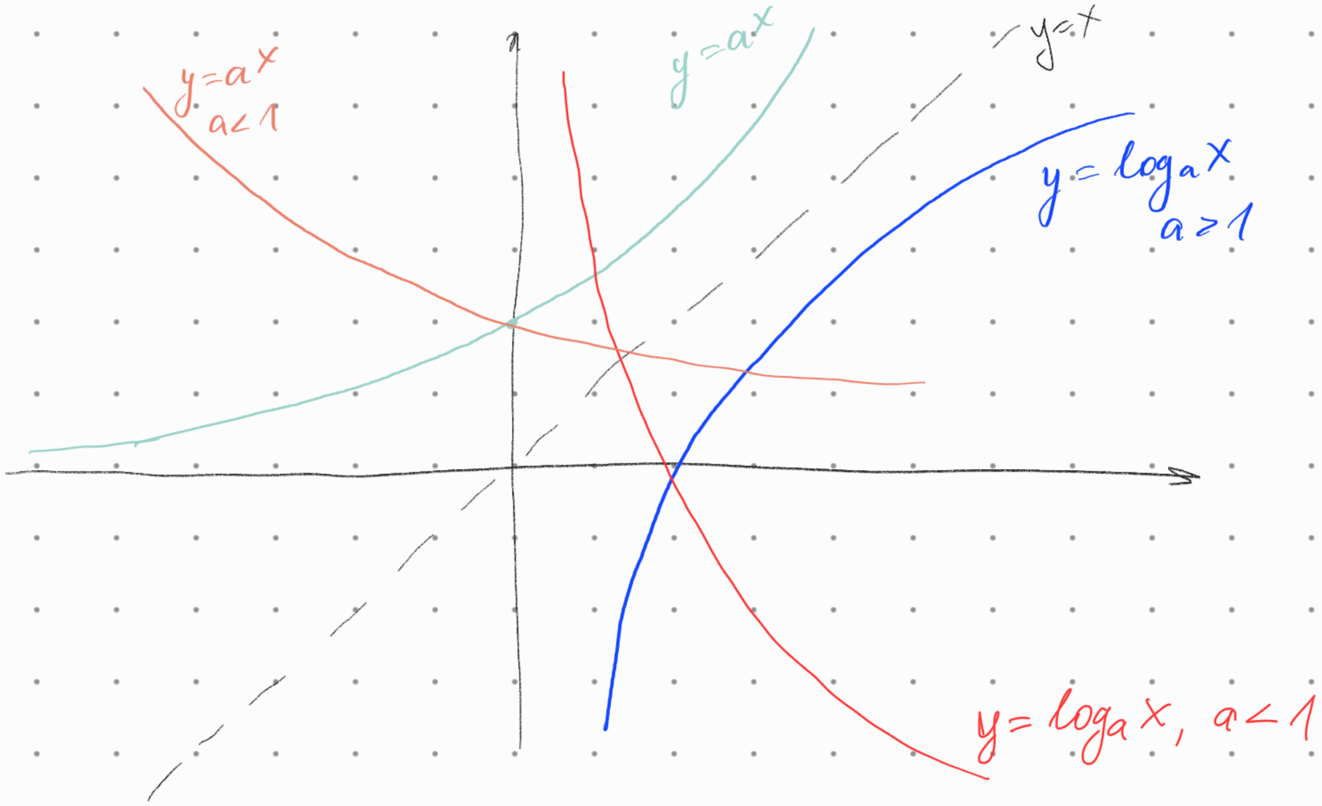
$f(x) \rightsquigarrow f(x-d)$ Verschiebung um d nach rechts

▷ Logarithmen

$$\log_a x = y \iff a^y = x \qquad a>0,\ x>0,\ a\neq 1$$

$f(x)=\log_a x$ heißt logarithmische Funktion zur Grundzahl (Basis) a und ist invers zur Exponentialfunktion a^x

$$a^{\log_a x} = x \quad (\text{für jedes } x>0)$$
$$\log_a\left(a^y\right) = y \quad (\text{für jedes } y)$$



Eigenschaften von Logarithmen:

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (x,y>0)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad (x,y>0)$$

$$\log_a(x^p) = p\cdot \log_a x \qquad (x>0)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (x>0,\ \underset{\text{beliebig}}{b>0,\ b\neq 1})$$

Bsp 1) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, weil $2^{-1} = \frac{1}{2}$

2) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2(2^{-2}) = -2\cdot \underbrace{\log_2 2}_{=1} = -2$

3) $\log_4 8 = ? \iff 4^{?} = 8 \qquad 1 < ? < 2$

Rechnen: $\log_4 8 \underset{\text{"Basiswechsel"}}{=} \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2}$

Probe: $4^{\frac{3}{2}} = 4^{1+\frac{1}{2}} = 4 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$ ✓

4) $\log_5 8 + \log_5 4 = \log_5 (8 \cdot 4)$

$= \log_5 (2^3 \cdot 2^2) = \log_5 (2^5) = \underline{5 \log_5 2}$

5) Skizziere: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{x}\right)$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\log_2 \left(\frac{2}{x}\right)}{\underbrace{\log_2 \frac{1}{2}}_{=-1}} = -\log_2 \left(\frac{2}{x}\right)$

$= -\left[\underbrace{\log_2 2}_{=1} - \log_2 x\right] =$

$= \log_2 x - 1$

Graph davon ist der Graph von $y = \log_2 x$ um 1 nach unten verschoben